OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-12 FEBRUARIE 2011
CLASA a-IX-a

SUBIECTUL I

Fie M un punct in interiorul triunghiului ABC si G_A, G_B, G_C respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MAC si MAB. Sa se arate ca $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \vec{0}$ daca si numai daca M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

Sa se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,2 \\ y + [z] + \{x\} = 2,3 \\ z + [x] + \{y\} = 3,5 \end{cases}$, unde $x, y, z > 0$, iar $[a]$ reprezinta partea intreaga a numarului real a.

SUBIECTUL III

Daca sirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ verifica egalitatea:

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + ... + (2n+1)a_n = (n+1)^2 a_n - \frac{1}{2}n(n+1),\ \forall n \geq 1,$$

sa se arate ca sirul $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $b_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - a_n}$ pentru orice n numar natural nenul, este o progresie aritmetica.

SUBIECTUL IV

Daca x, y si z sunt numere reale pozitive astfel incat $x + y + z = 2011$, atunci are loc inegalitatea:

$$\sqrt{2011x + yz} + \sqrt{2011y + xz} + \sqrt{2011z + xy} \leq 4022.$$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.